

# La función exponencial basada en el estudio de clases

**Carlos Andrés Ledezma Araya**

Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

## Resumen

El presente estudio tiene por objetivo estudiar las características didácticas que debe tener una clase para que los estudiantes de Segundo año medio (15 a 16 años) sean capaces de alcanzar las etapas del proceso de modelización matemática. Para ello, se diseñó una secuencia de tres clases con el objeto función exponencial, estructuradas según el modelo didáctico-cognitivo de Blomhøj y Jensen para el proceso de modelización matemática, con el cual, en conjunto con elementos de la Teoría APOE, se analizaron los resultados de tres intervenciones que se implementaron con el primer plan de clase de la secuencia. Los resultados evidenciaron los logros de los grupos de estudiantes con respecto al proceso de modelización, y las construcciones mentales en determinadas fases del mismo, permitiendo proyectar el estudio para futuras implementaciones y reformulaciones.

**Palabras Clave:** Estudio de clase, función exponencial, modelización matemática

## Introducción

La noción de función se encuentra presente desde los primeros niveles educativos en el ámbito de la matemática escolar, sin embargo, el currículo chileno postula el comienzo de su estudio formal en el nivel Octavo año básico (13 a 14 años) en sus formas lineal y afín, junto con el desarrollo de la habilidad de modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2016). Adicionalmente, el Programa de Estudios vigente hasta 2017 estipulaba que en el nivel Segundo año medio (15 a 16 años) se introducían las funciones raíz cuadrada, exponencial y logarítmica, trabajando también la modelización (MINEDUC, 2011).

En el análisis efectuado a dos textos de estudio utilizados hasta 2017 para el curso Segundo año medio, se evidenció una carencia de ejercicios de modelación con el objeto matemático función exponencial (véase Ledezma, 2017), en el sentido que las actividades propuestas descuidaban la concreción de las distintas fases de un proceso de modelización requerido para la construcción de conocimiento matemático (Blum y Borromeo-Ferri, 2009). De acuerdo a ello, esta carencia a la que se aludió anteriormente en los textos escolares puede limitar el desarrollo de la habilidad de modelar en los estudiantes, a pesar

del interesante esfuerzo que se establece en MINEDUC (2011; 2016) por introducir y trabajar la modelación en el currículo nacional.

Para esta investigación se ha propuesto como objetivo principal estudiar las características didácticas que debe tener una clase de modelación para que los estudiantes sean capaces de alcanzar todas las etapas del proceso de modelización matemática, y a su vez, comprender cómo el proceso de modelización matemática aporta al aprendizaje del objeto matemático función exponencial.

### Marco Conceptual

Para este estudio se construyó un marco conceptual basado en dos referentes: por una parte, en el modelo cognitivo sobre las etapas del proceso de modelización matemática, propuesto por Blomhøj y Jensen (Blomhøj y Jensen, 2003; Blomhøj, 2004); y por otra, en la adaptación y modificación de un fragmento de la descomposición genética (en adelante, DG) propuesta por Vargas (2012) para la función exponencial. La articulación entre ambos referentes permite una mirada en la construcción de procesos, desde la Teoría APOE (Dubinsky, 1991), sobre ciertas fases del proceso de modelización matemática.

En el modelo propuesto por Blomhøj y Jensen (Blomhøj y Jensen, 2003; Blomhøj, 2004), se detallan seis sub-procesos, sobre los que sus autores enfatizan que no deben ser entendidos en forma lineal, sino que cíclica, lo que puede provocar una redefinición del modelo si la situación lo amerita. En consonancia, se adopta la noción de modelización matemática definida

por Blum et al. (2003), como aquel proceso en que una situación-problema del mundo real es llevada hacia el mundo matemático en forma de un modelo, y que puede ser considerada como una herramienta significativa para el aprendizaje de la matemática, tanto por la relación que permite establecer con el mundo real, como por la importancia de su implementación como estrategia de aula, en donde se le conoce como modelación (Bassanezi y Biembengut, 1997).

Con respecto a la DG antes mencionada, se adaptó y modificó un fragmento de ésta con el fin de adecuarla a los contenidos y habilidades trabajados en Segundo año medio según al Programa de Estudio vigente hasta 2017, con un foco en la construcción de procesos durante las fases de matematización y de análisis matemático. Para ello, los prerrequisitos considerados para la DG fueron: la función como objeto matemático, el concepto de exponente natural mayor que 1, la noción de exponente no natural, y las propiedades de los exponentes (Vargas, 2012).

### Metodología y contexto de la experimentación

Este estudio, de corte cualitativo y paradigma interpretativo, se enmarcó en el Estudio de Clases Japonés en la forma de una investigación-acción del tipo práctica. Se diseñó una secuencia didáctica de tres clases para estudiantes de Segundo año medio, donde la primera de éstas fue implementada en tres cursos distintos, según el acceso de los investigadores. En cada intervención, los estudiantes se organizaron en grupos de tres a cinco integrantes cada uno, como lo muestra la tabla 1.

Intervención	Grupos	Total estudiantes
Primera intervención (a)	G1a, G2a, G3a	23
Segunda intervención (b)	G1b, G2b, G3b, G4b	24
Tercera intervención (c)	G1c, G2c, G3c, G4c	30

*Tabla 1:* Clasificación de los grupos y número total de sujetos informantes por intervención

Para la recopilación de información, se registraron en video cada una de las intervenciones, y se recolectaron las producciones escritas de los estudiantes sobre el desarrollo de la actividad de clase implementada, considerando para su análisis sólo aquellas que los sujetos informantes entregaron en forma ordenada y legible al término de cada sesión.

### Análisis de Resultados

Para el análisis de los resultados, se levantaron seis categorías, correspondientes a las fases del proceso de modelización matemática: formulación del problema (FP), sistematización (SM), matematización (MT), análisis matemático (AM), interpretación/evaluación (IE) y validación

(VL); y cinco sub-categorías, correspondientes a las construcciones mentales evidenciables durante las fases MT y AM, desprendidas de la adaptación y modificación de la DG: la acción 'diferencia de dos variables' (AD) y su interiorización en el proceso 'variación de variables' (PV), la acción 'cociente de dos variables' (AC) y su interiorización en el proceso 'razón de variables' (PR), y la coordinación de los procesos PV y PR en el proceso 'invariante de la función exponencial' (PI).

La tabla 2 muestra una síntesis global de los resultados obtenidos de la implementación del estudio, en la que se clasifican las producciones escritas de los grupos de sujetos informantes respecto de las etapas que lograron desarrollar del proceso de modelización matemática, y si evidenciaron construcciones mentales durante las fases MT y AM.

Grupos	Categorías/Sub-categorías					
	FP	SM	MT	AM	IE	VL
G1a	X	X				
G2a	X	X				
G3a	X	X	X	X	X	X

G3b	X	X	X	X		
G4b	X	X	Ad. Ac. Pv		X	
G1c	X	X	X	X	X	
G2c	X	X	X	X	X	
G3c	X	X	X	X	X	X
G4c	X	X	X	X		

Tabla 2: Síntesis global de los resultados del estudio

En este estudio, se consideró como 'clase ideal' a aquella en la que, incluso presentándose dificultades y errores por parte de los estudiantes, éstos son subsanados con las devoluciones del profesor y las reflexiones propias del alumnado, para así poder lograr completamente las fases de la modelización. Bajo este principio es que se afirma que la tercera clase fue la más cercana a una 'clase ideal', ya que evidenció una mayor homogeneidad en sus resultados. Lo anterior, también guarda relación con la metodología del Estudio de Clases Japonés, pues al término de cada intervención se realizaron adecuaciones al plan de clase y mejoras a las devoluciones del docente, con base en las dificultades y errores evidenciados, otorgándose un carácter de perfectible a la propuesta diseñada.

## Conclusiones

El estudio permitió vislumbrar que una de las características a tener en consideración para

una clase de modelación es que ésta logre el balance entre una mínima intervención directa del profesor y una máxima independencia por parte de los estudiantes para desarrollar el ciclo de modelización matemática, en torno al planteamiento de una situación-problema desafiante, pero no imposible de resolver, y donde las preguntas del profesor permitan el tránsito de los alumnos a través de las fases propuestas, pero sin guiarlos en las respuestas (Blum y Borromeo-Ferri, 2009). Por otra parte, los datos recolectados de las intervenciones evidenciaron, en parte, sólo la reafirmación de aprendizajes en los alumnos, más que el logro de nuevos conocimientos.

Tanto la implementación como el análisis de los resultados obtenidos, sugirió una mirada de la modelización no como un objeto matemático, sino más bien como un proceso que requiere de la articulación de distintos elementos, tanto en lo que respecta a las habilidades y contenidos matemáticos previos, como del factor empírico en los sujetos que la desarrollan.

Este estudio fue financiado parcialmente por el Proyecto FONDECYT n° 1171744.

## Referencias

- Bassanezi, R. y Biembengut, M. S. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación – un nuevo método de enseñanza. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 32, 13-25. Obtenido desde <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/32/Articulo02.pdf>
- Blomhøj, M. (2004). *Mathematical Modelling: A Theory for Practice*. En B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lester, A. Wallby y K. Wallby (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). Gotemburgo, Suecia: National Center for Mathematics Education.
- Blomhøj, M. y Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 22(3), 123-139. doi:10.1093/teamat/22.3.123
- Blum, W., Alsina, C., Biembengut, M. S., Bouleau, N., Congrey, J., Galbraith, P., ... Henn, H. W. (2003). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1/2), 149-171. doi:10.1023/a:1022435827400
- Dubinsky, E. (1991). Reflexive Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- Ledezma, C. (2017). Estudio de la Modelación con Función Exponencial para Estudiantes de Segundo Año Medio, según el Modelo de Blomhøj y Jensen (Tesis de magister no publicada). Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.
- Ministerio de Educación de Chile. (2011). *Matemática. Programa de Estudio para Segundo Año Medio*. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación de Chile. (2016). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Santiago, Chile: Autor.

Vargas, J. (2012). *Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales* (Tesis doctoral, Universidad de Salamanca, Salamanca, España). Obtenido desde <http://hdl.handle.net/10366/121430>